Résumé 09 : Topologie (I)

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ sera le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E sera un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

§ 1. Rappel sur la borne supérieure .–

Définition .1 (*Borne supérieure d'un ensemble*)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$. on dit que m est la borne supérieure de Ω et on note $m = \sup \Omega$ lorsque :

1. *Pour tout $\omega \in \Omega, \omega \leqslant m$.*
2. *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\omega \in \Omega$ tel que $m - \epsilon \leqslant \omega$.*

Remarques :

- Le premier point signifie que la borne supérieur de Ω est un majorant de Ω et le deuxième qu'aucun réel inférieur à la borne supérieure de Ω n'est un majorant de Ω, ce qui conjointement justifie que l'on dise de la borne supérieure qu'el le est le plus petit des majorants.
- Rappelons que le maximum (ou max) d'un ensemble Ω est quant à lui un réel appartenant à Ω et majorant de Ω. Le problème du maximum est que certaines (beaucoup trop en fait) parties majorées de $\mathbb{R}$ n'admettent pas de maximum (par exemple $[0, 1[$), alors qu'elles admettent une borne supérieure :

Théorème .2 (*de la borne supérieure*)

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Définition .3

Si I est un ensemble, et si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction majorée, on notera $\sup f$, ou $\sup_{x \in I} f(x)$, la borne supérieure de l'ensemble $\{f(x)$ où $x \in X\}$.

Si maintenant f est une fonction **continue** sur un **segment** $[a, b]$, alors elle est bornée et atteint ses bornes (théorème parfois dit de la borne atteinte). En particulier, sa borne supérieure est un maximum : il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = \sup_{[a,b]} f$. C'est un théorème d'existence très utile, et on peut voir le cours qui suit comme le résultat d'une volonté d'entendre ceci à des fonctions définies sur des espaces vectoriels.

I Les normes

Définition I.1

*On appelle **norme** sur E toute application $N : E \to \mathbb{R}_+$ (donc positive) qui vérifie*

1. *Pour tout $x \in E, N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0_E$.*
2. *Pour tout $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.*
3. *Pour tout $x, y \in E, N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$.*

*(E, N) est alors appelé **espace vectoriel normé**.*
*Un vecteur $x \in E$ est dit **unitaire** lorsque $N(x) = 1$.*

Voyons quelques exemples :

- $\mathbb{R}$ muni de sa valeur absolue est un espace vectoriel normé. De même, $\mathbb{C}$ muni du module est un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel normé ainsi qu'un $\mathbb{C}-$ espace vectoriel normé. Rien d'étonnant à cela puisque la notion d' espace vectoriel normé provient d'une volonté d'étendre la notion de valeur absolue à tout espace vectoriel .
- Sur $E = \mathbb{K}^n$, où $n \geqslant 1$, on définit trois normes. Soit $X = (x_1, \ldots, x_n) \in E$.
  1. $\|X\|_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_i|$.
  2. $\|X\|_2 = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_i|^2}$.
  3. $\|X\|_\infty = \displaystyle\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$.
- Sur $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, où $n \geqslant 1$, on définit trois normes, qui sont exactement les trois précédentes avec l'identification $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n^2}$.
  Soit $M = (m_{i,j}))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in E$.
  1. $\|M\|_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}|$.
  2. $\|M\|_2 = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}|^2} = \sqrt{\text{Trace } ({}^tAA)}$.
  3. $\|M\|_\infty = \displaystyle\max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |m_{i,j}|$.
- Enfin, sur $E = \mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{K})$, on définit trois normes. Soit $f \in E$.
  1. $\|f\|_1 = \displaystyle\int_a^b |f(t)| \mathrm{d}t$.
  2. $\|f\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_a^b |f(t)|^2 \mathrm{d}t}$.

3. $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$.

Remarques :

1. Les trois normes dites “2” que l’on vient de définir proviennent d’un produit scalaire (nous n’avons vu en sup que le produit scalaire sur un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel , mais nous verrons que sa définition s’étend au cas où le corps de base est $\mathbb{C}$). Rappelons qu’un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive $B : E\times E \to \mathbb{R}$. L’application $x\in E \mapsto \sqrt{B(x,x)}$ est alors une norme sur E, dite norme euclidienne. Le point délicat à prouver est l’inégalité triangulaire. Cela se fait avec l’inégalité de Cauchy-Schwarz. Pour les puristes, on en déduit une caractérisation géométrique du cas d’égalité dans l’inégalité triangulaire, cela uniquement si la norme est euclidienne :
$$\|x+y\|_2 = \|x\|_2 + \|y\|_2 \iff \exists \lambda \geqslant 0, x = \lambda y.$$
2. Puisqu’une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes, si $f\in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{K})$, il existe $x_0\in[a,b]$ tel que $\|f\|_\infty = |f(x_0)|$.

II Distances et Boules

§ 1. ***Distances.–*** Cette première définition n’est pas au programme, mais au vu du nombre de fois que nous utiliserons ce mot, il est difficile de ne pas le préciser.

Définition II.1

Une **distance** *sur un ensemble X est une application $d : X\times X \to \mathbb{R}$ qui vérifie :*

1. *Pour tout $x,y\in X, d(x,y) = 0 \iff x = y$.*
2. *Pour tous $x,y\in X, d(x,y) = d(y,x)$.*
3. *Pour tous $x,y,z\in X, d(x,z) \leqslant d(x,y)+d(y,z)$.*

Proposition II.2

Sur un espace vectoriel normé $(E,\|.\|)$, l’application suivante est une distance :
$$d : (x,y)\in E\times E \mapsto d(x,y) = \|x-y\|.$$

Définissons maintenant la distance d’un point à un ensemble :

Définition II.3

Pour toute partie non vide Ω de $(E,\|.\|)$ et tout $x\in E$, on appelle **distance entre le vecteur** x **et l’ensemble** Ω *le réel $d(x,\Omega) = \inf_{\omega\in\Omega} \|x-\omega\|$.*

Remarques :

Notons que si x est élément de Ω, alors $d(x,\Omega) = 0$, mais que la réciproque est fausse : $d(1,[0,1[) = 0$.

§ 2. ***Boules et sphères.–*** La notion de boule généralise aux espaces vectoriels normés celle de voisinage d’un point de $\mathbb{R}$.

Définition II.4

Soit $x_0\in E$ et $r>0$. On appelle :

1. **boule ouverte** *de centre x_0 et de rayon r l’ensemble*
$$B(x_0,r) = \{x\in E \text{ tels que } \|x-x_0\| < r\}.$$
2. **boule fermée** *de centre x_0 et de rayon r l’ensemble*
$$\overline{B}(x_0,r) = \{x\in E \text{ tels que } \|x-x_0\| \leqslant r\}.$$
3. **sphère** *de centre x_0 et de rayon r l’ensemble*
$$S(x_0,r) = \{x\in E \text{ tels que } \|x-x_0\| = r\} = \overline{B}(x_0,r)\setminus B(x_0,r).$$

§ 3. ***Parties bornées, diamètre.–***

- Une partie Ω non vide d’un espace vectoriel normé est dite **bornée** lorsqu’il existe $K>0$ tel que tout $\omega\in\Omega$ est de norme inférieure à K.
- Le **diamètre** d’une partie bornée Ω est Diam $(\Omega) = \sup\left\{\|x-y\| \text{ où } x,y\in\Omega\right\}$.
- Soit un ensemble X et un espace vectoriel normé $(E,\|.\|)$. Une application $f : X\to (E,\|.\|)$ est dite **bornée** lorsque son image $f(I)$ est une partie bornée de E, i.e lorsque
$$\exists K>0, \forall x\in I, \|f(x)\| \leqslant K.$$
On appelle alors **norme infinie de** f, ou **norme de la convergence uniforme**, le réel $\|f\|_\infty = \sup\left\{\left\|f(x)\right\| \text{ où } x\in I\right\}$.

Proposition II.5

Soit I un ensemble et $(E,\|.\|)$ un espace vectoriel normé. On note $B(I,E)$ la partie de $\mathscr{F}(I,E)$ constituée des fonctions bornées de I dans E.

1. $B(I, E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I, E)$.
2. Muni de la norme infinie, $B(I, E)$ est un espace vectoriel normé.

§ 4. *Fonctions Lipschitziennes.–* **Définition II.6**

$f : E \to F$ est dite **Lipschitzienne** *lorsqu'il existe $K > 0$ tel que pour tous $x, y \in E$,*

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant K\|x - y\|.$$

Exemples :

- La norme est une fonction $1-$Lipschitzienne, car pour touts $x, y \in E$, $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\|$.
- Pour toute partie Ω de E, $x \in E \longmapsto d(x, \Omega)$ est aussi $1-$Lipschitzienne : pour tous $x, y \in \Omega$, $\big|d(x, \Omega) - d(y, \Omega)\big| \leqslant \|x - y\|$.
- L'inégalité des accroissements finis nous dit qu'une fonction dérivable $f : I \to \mathbb{R}$ est $K-$Lipschitzienne si et seulement si $|f'|$ est majorée par K.

III Suites dans un espace vectoriel normé

Soit (u_n) une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé et $\ell \in E$. On dit que (u_n) tend vers ℓ si pour toute boule ouverte centrée en ℓ, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les éléments de cette suite appartiennent à cette boule. Plus précisément :

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \big(n \geqslant n_0 \implies \|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon\big).$$

Une suite qui admet une limite est dite convergente. Sinon, elle est dite divergente.

Proposition III.1

Si (u_n) admet une limite, celle-ci est unique. De plus, la suite (u_n) est bornée.

Remarques :

- Modifier un nombre fini de termes de la suite ne change ni sa nature, ni la valeur de son éventuelle limite.
- La notion de limite est intimement liée au choix de la norme sur E. Par exemple, pour la norme 1, la suite de fonctions $f_n : x \mapsto nxe^{-nx}$ ne converge pas pour la norme infinie vers la fonction nulle, alors que pour la norme 1, elle converge vers la fonction nulle, puisque $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n}$.
- Une suite est divergente lorsque pour tout $\ell \in E, \forall \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geqslant N$ ET $\|u_n - \ell\| \geqslant \varepsilon$. Mais nous verrons que les suites extraites sont bien plus efficaces pour prouver une divergence.

Proposition III.2

La suite (u_n) converge vers ℓ lorsque l'une des assertions équivalentes suivantes est vérifiée

1. $u_n - \ell \longmapsto 0_E$.
2. $\|u_n - \ell\| \longmapsto 0_{\mathbb{R}}$.
3. *Il existe une suite $(\alpha_n)_n$ de réels convergeant vers $0_{\mathbb{R}}$ telle que $\|u_n - \ell\| \leqslant \alpha_n$.*

§ 1. *Valeurs d'adhérence.–* **Définition III.3**

Une **suite extraite** *de (u_n) est une suite du type $\big(u_{\varphi(n)}\big)_n$, où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.*
Un vecteur $\ell \in E$ est une **valeur d'adhérence** *de (u_n) s'il existe une suite extraite de (u_n) qui tend vers ℓ.*

Proposition III.4

Si (u_n) converge ves ℓ, toutes ses suites extraites convergent aussi vers ℓ.

On se servira de cette proposition pour prouver qu'une suite diverge, en lui trouvant deux valeurs d'adhérence distinctes.

§ 2. *Equivalences de normes.–* **Définition III.5**

Deux normes N et ν sur un espace vectoriel E sont dites **équivalentes**, *lorsqu'il existe deux réels $a, b > 0$ tels que pour tous x et $y \in E$,*

$$aN(x) \leqslant \nu(x) \leqslant bN(x).$$

On peut caractériser l'équivalence de normes avec les suites de limite nulle :

Théorème III.6

Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel et N et $\|.\|$ deux normes sur E.
Elles sont équivalentes si et seulement si pour toute suite (u_n) d'éléments de E,

$$\lim_{n\to\infty} N(u_n) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|u_n\| = 0.$$

§ 3. ***Densité.–*** Finissons par une notion centrale de topologie :

Définition III.7

Soient $A \subset B$ deux parties d'un espace vectoriel normé. On dit que A est dense dans B lorsque pour tout $b \in B$ et pour tout $r > 0$, il existe $A \cap B(b, r)$ est non vide.

Par exemple, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus Q$ sont deux parties denses dans $\mathbb{R}$.

Proposition III.8

Soient $A \subset B$ deux parties d'un espace vectoriel normé. A est dense dans $B \Longleftrightarrow$ pour tout $b \in B$, il existe une suite d'éléments de A qui converge vers b.

Exemples :

Il FAUT connaitre les démonstrations sur les comparaisons des trois normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$, et sur $\mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, et notamment se souvenir que pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes, il suffit de construire une suite d'éléments de E convenable.

IV Suites numériques

Se conférer au cours de première année, ainsi qu'au polycopie que je vous ai distribué sur $o, O, \sim$.

- Les approximations décimales d'un réel x : $u_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.
- Les définitions de $\lim_{n\to\infty} u_n = \pm\infty$.
- Les suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f : I \to I$.
- Les suites du type $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$.

ANNEXE

A Les preuves à connaitre...

- Si N et ν sont deux normes sur E. Il y a équivelance entre les deux assertions suivantes :
  1. Il existe $a > 0$ tel que pour tout $x \in E, \nu(x) \leqslant aN(x)$.
  2. Pour toute suite (u_n) d'éléments de E, si $N(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors $\nu(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
- Les normes $1, 2$ et ∞ sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$.

B Les figures imposées

Exercices :

CCP Analyse 37 On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$.
On pose, $\forall\, f \in E$, $N_\infty(f) = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(x)| \mathrm{d}x$.

1. (a) Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.
   (b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leqslant k N_\infty(f)$.
2. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

Exercices :

CCP Analyse 55 Soit a un nombre complexe.
On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :
$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2a u_{n+1} + 4(ia - 1) u_n$ avec $(u_0, u_1) \in (\mathbb{C})^2$.

1. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
   Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.
2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
   Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.
   Indication : discuter suivant les valeurs de a.